

На правах рукописи



НГУЕН ТХИ ШАНГ

**ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ
ПЛАСТИНЫ С НЕОДНОРОДНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула – 2023

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель:	Толоконников Лев Алексеевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Пшеничнов Сергей Геннадиевич – доктор физико-математических наук, доцент, НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, лаборатория динамических испытаний, ведущий научный сотрудник Шитикова Марина Вячеславовна – доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Россихина Ю.А., руководитель
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится « 27 » июня 2023 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета 24.2.417.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 и на сайте https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/NGUYEN_THI_SANG

Автореферат разослан «26» апреля 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Проблема динамического взаимодействия деформируемых твердых тел с акустической средой имеет важное теоретическое и практическое значение, что определяется широким использованием гидроупругих систем во многих отраслях современной техники. В качестве основных конструктивных элементов такого рода систем являются пластины. При этом их толщина может варьироваться в достаточно широких пределах.

Применение акустических методов в исследовательской и производственной практике требует разработки математических моделей, адекватно описывающих волновые процессы в системе упругое тело – жидкость и необходимых при решении многих практических задач гидроакустики, геофизики, дефектоскопии, биомеханики, медицинской диагностики.

Прохождение звуковых волн через упругие пластины исследовалось во многих работах. Наиболее принципиальные теоретические проблемы в изучении процессов отражения, преломления, трансформации волн в однородных изотропных упругих пластинах решены в работах Бреховских Л.М., Лямшева Л.М., Шендерова Е.Л., Barnard G.R., Beranek L.L., Fay R.D., Piquette J.C. и др. Результаты исследований отражения и прохождения звука через дискретно-неоднородные плоские упругие слои содержатся в работах Бреховских Л.М., Година О.А., Молоткова Л.А., Рыбака С.А., Тарлаковского Д.В., Hasheminejad S.M., Jamalpoor A. и др., а через непрерывно-неоднородные слои – в работах Приходько В.Ю., Тюткина В.В., Ларина Н.В., Селезова И.Т., Скобельцына С.А., Толоконникова Л.А., Hasheminejad S.M., Huang C., Nutt S., Shabanimotlagh M. и др.

Характер звукоотражения и звукопрохождения упругих пластин можно изменять с помощью специальных покрытий. Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Обеспечить требуемые звукоотражающие свойства тел можно с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия.

Актуальности исследований отражения звука от упругих тел с неоднородными покрытиями способствует все более широкое использование на практике новых функционально-градиентных и композиционных материалов, свойства которых непрерывно или кусочно-непрерывно меняются по толщине.

Таким образом, важной проблемой является изучение влияния непрерывно-неоднородных упругих покрытий на звукоотражающие свойства упругих пластин. Такие исследования представляют значительный интерес и необходимы для разработки современных промышленных материалов, используемых, например, для шумоподавления, и для создания покрытий, обеспечивающих требуемые акустические характеристики тел и элементов конструкций.

Целью работы является исследование влияния неоднородных упругих покрытий на отражение и прохождение звука через однородные упругие пластины, граничащие с идеальными и вязкими жидкостями.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- поставлены и решены новые задачи о прохождении плоских, цилиндрических и сферических гармонических звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными и вязкими жидкостями;
- исследовано влияние неоднородности покрытия и его расположения на акустические характеристики пластины;
- проведён численный анализ отраженного и прошедшего через пластину с покрытием акустических полей.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы представляют собой вклад в развитие теории дифракции звуковых волн. Полученные результаты могут быть использованы для получения информации, необходимой в гидроакустике для звуковой эхолокации различных объектов; в судовой акустике при изучении акустических характеристик судовых конструкций; в дефектоскопии для разработки методов неразрушающего контроля и идентификации результатов экспериментальных исследований; в строительной индустрии для разработки новых конструкций сэндвич-панелей; в медицине при разработке методов ультразвуковой диагностики; при решении обратных задач рассеяния звуковых волн.

Методы исследования. В диссертационной работе используются аналитические и численные методы исследования.

Решение поставленных задач получены в рамках линейной теории упругости и гидродинамики идеальной и вязкой сжимаемой жидкости.

Аналитическое описание волновых полей получено на основе метода разделения переменных с использованием разложений по волновым функциям.

Решение краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при определении полей смещений в неоднородном упругом покрытии, находится методом степенных рядов.

В случаях, когда падающая волна имеет криволинейный фронт распространения, для решения задач использован метод, базирующийся на решении задачи об отражении и прохождении плоской волны.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректной постановки задач и обоснованности применяемых математических методов; обеспечивается проведением расчётов на ЭВМ с контролируемой точностью; подтверждается совпадением полученных решений с известными результатами для частных случаев.

Положения, выносимые на защиту:

- математические модели отражения и прохождения гармонических звуковых волн через упругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием, граничащую с идеальными и вязкими жидкостями;
- аналитические решения задач об отражении и прохождении плоских, цилиндрических и сферических волн через однородную упругую пластину с непрерывно-неоднородным покрытием;
- результаты численных исследований отраженного пластиной и прошедшего через нее акустических полей; анализ влияния неоднородного покрытия на акустические характеристики пластины.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались:

- на региональной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, Тула, ТулГУ, 2018);
- на международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Россия, Воронеж, ВГУ, 2021, 2022);
- на научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава ТулГУ (Россия, Тула, ТулГУ, 2023).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе: 4 статьи в изданиях, индексируемых в базе данных Scopus; 1 статья в издании, рекомендованном ВАК Минобрнауки РФ, 2 статьи в межвузовских сборниках, 2 по материалам международных конференций. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Обзор литературы и модели в главе 1, результаты работы, представленные в разделах 2.4, 3.2, 3.4, 4.2, 4.3.1, 4.4, 4.5, 5.3, получены автором. Результаты работы, приведенные в разделах 2.1 – 2.3, 3.1, 3.3, 4.1, 4.3.2, 5.1, 5.2, изложены на основе совместных работ с Толоконниковым Л.А. Личный вклад автора в эти работы состоит в получении аналитических решений задач, проведении численных исследований.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 82 страницы, в том числе 107 рисунков. Список литературы включает 102 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы диссертационной работы, указана цель и основные направления намеченных исследований, отмечена научная новизна работы, очерчена область возможных приложений, излагаются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава состоит из пяти разделов. В **разделе 1.1** содержится обзор литературы по проблеме исследований. В **разделах 1.2 – 1.5** приводятся математические модели, описывающие волновые поля в идеальной и вязкой жидкостях, в однородных и неоднородных упругих средах в случае малых возмущений и установившегося режима колебаний с временным множителем $\exp(-i\omega t)$ (ω – круговая частота).

Распространение звука в идеальной сжимаемой жидкости описывается полной системой линеаризованных уравнений гидромеханики идеальной жидкости, включающей уравнение Эйлера, уравнение неразрывности и уравнение физического состояния. Из этой системы приходим к скалярному волновому уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (1.1)$$

где ψ – потенциал скорости звуковых волн; k – волновое число. При этом скорость частиц жидкости $\mathbf{v}$ и акустическое давление p определяются по формулам: $\mathbf{v} = \text{grad } \psi$, $p = i\rho_0\omega\psi$, где ρ_0 – равновесная плотность жидкости.

Распространение звука в вязкой сжимаемой жидкости описывается полной системой уравнений гидродинамики вязкой жидкости, включающей уравнение

Навье-Стокса, уравнение неразрывности и уравнение физического состояния. Последняя система приводится к системе волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_1 + k_1^2 \Psi_1 = 0, \quad (1.2)$$

$$\Delta \Phi_1 + \kappa^2 \Phi_1 = 0, \quad (1.3)$$

где Ψ_1 и Φ_1 – скалярный и векторный потенциалы скорости; k_1 и κ – волновые числа продольных и вязких волн. При этом скорость частиц среды и акустическое давление определяются по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi_1 + \text{rot } \Phi_1, \quad p = i\omega\rho_0 \left[1 + i(k_1^2 / \omega)(\xi + \nu / 3) \right] \Psi_1,$$

где ν и ξ – первый и второй кинематические коэффициенты вязкости.

Распространение упругих волн в однородной изотропной упругой среде описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые приводятся к уравнению Ламе и из которого при отсутствии массовых сил получаем систему волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (1.4)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (1.5)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; k_l и k_τ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн соответственно. Вектор смещения частиц упругого однородного слоя $\mathbf{u}^0 = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi$.

В двумерном случае, когда волновые поля не зависят от координаты y , $\Phi_1 = \Phi_1(x, z)\mathbf{e}_y$ и $\Phi = \Phi(x, z)\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ – единичный вектор оси y . Тогда векторные уравнения (1.3) и (1.5) сведутся к одному скалярному уравнению Гельмгольца относительно функции $\Phi_1(x, z)$ и $\Phi(x, z)$ соответственно.

Распространение упругих волн в неоднородных изотропных упругих средах описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые при отсутствии массовых сил в декартовых прямоугольных координатах имеют вид:

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = -\omega^2 \rho u_i, \quad (1.6)$$

где σ_{ij} и u_i – компоненты тензора напряжений и вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородной среде; ρ – плотность.

Граничные условия на поверхности Γ , соприкасающейся с идеальной жидкостью, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$v_n|_{\Gamma} = -i\omega u_n|_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma} = -p'|_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma} = 0.$$

На поверхности, соприкасающейся с вязкой жидкостью, граничные условия заключаются в равенстве скоростей частиц упругой среды и жидкости, непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений:

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = -i\omega \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma} = \sigma_{1nn}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma} = \sigma_{1n\tau}|_{\Gamma}.$$

На границе раздела двух упругих сред должны быть непрерывны векторы смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения:

$$\mathbf{u}^0|_{\Gamma} = \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{nn}^0|_{\Gamma} = \sigma_{nn}|_{\Gamma}, \quad \sigma_{n\tau}^0|_{\Gamma} = \sigma_{n\tau}|_{\Gamma}.$$

Во **второй главе** рассмотрены задачи об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием, граничащую с идеальными жидкостями, в случаях, когда покрытие нанесено на разные стороны пластины.

В **разделе 2.1** содержится постановка указанных выше задач.

Рассматривается однородная изотропная бесконечно протяженная упругая пластина толщиной H . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h . Модули упругости материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями координаты z , а плотность ρ – непрерывной функцией координаты z . Прямоугольная декартова система координат x, y, z выбрана так, как показана на рис. 2.1. Рассматриваются два случая расположения покрытия на пластине: покрытие расположено со стороны падения плоской волны (рис. 2.1 *a*) и с противоположной стороны (рис. 2.1 *b*).

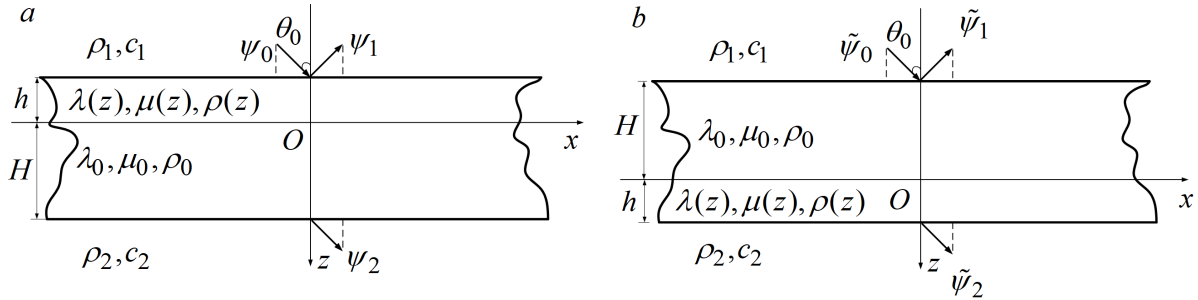


Рис. 2.1. Геометрия задачи

На пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор $\mathbf{k}_1$ которой лежит в плоскости x, z .

Потенциал скорости падающей волны записывается в виде

$$\psi_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h) - \omega t]\}, \quad (2.1)$$

для случая, изображенного на рис. 2.1 *a*, и в виде

$$\tilde{\psi}_0 = A_0 \exp \{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + H) - \omega t]\}, \quad (2.2)$$

для случая, изображенного на рис. 2.1 *b*.

Здесь A_0 – амплитуда волны; k_{1x} и k_{1z} – проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на оси координат x и z соответственно.

Требуется определить отраженную и прошедшую через пластину с покрытием волны и выяснить особенности прохождения звука для различных законов неоднородности материала покрытия при расположении покрытия на разных сторонах пластины.

В **разделе 2.2** получены аналитические решения поставленных задач.

Задачи являются двумерными. Приведем решение задачи для случая, когда покрытие расположено со стороны падения плоской волны.

Потенциалы скорости, отражённой от пластины ψ_1 и прошедшей через неё ψ_2 волн, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (1.1), ищутся в виде

$$\psi_1 = A_1 \exp\{i[k_{1x}x - k_{1z}(z + h)]\}, \quad \psi_2 = A_2 \exp\{i[k_{2x}x + k_{2z}(z - H)]\}, \quad (2.3)$$

Потенциалы смещения Ψ и Φ , являющиеся решениями уравнений Гельмгольца (1.2), (1.3), представляются в виде

$$\Psi = B_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1z}z)] + B_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{1z}z)], \quad (2.4)$$

$$\Phi = C_1 \exp[i(k_{1x}x + k_{1z}z)] + C_2 \exp[i(k_{1x}x - k_{1z}z)], \quad (2.5)$$

При этом согласно закону Снеллиуса $k_{2x} = k_{1x} = k_{tx} = k_{1x}$.

Компоненты векторов смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном покрытии определяются выражениями

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), \quad u_z = U_2(z) \exp(ik_{1x}x), \quad (2.6)$$

где функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ являются решениями краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = (U_1, U_2)^T. \quad (2.7)$$

Из граничных условий на поверхностях пластины с покрытием находим выражения для коэффициентов A_j , B_j , C_j ($j = 1, 2$) и четыре условия для нахождения частного решения системы (2.7)

$$(\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{E}\mathbf{U})_{z=-h} = \mathbf{D}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{U}' + \mathbf{F}\mathbf{U})_{z=0} = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{D}$ – матрицы, элементы которых являются функциями частоты и параметров материалов пластины и покрытия. Штрихом обозначена производная по z .

В случае, когда покрытие расположено со стороны, противоположной падению волны, задача решается аналогичным образом.

В разделе 2.3 получено аналитическое описание поля смещений в неоднородном покрытии. Для этого методом степенных рядов найдены решения построенных краевых задач. Приведем решение краевой задачи (2.7), (2.8).

Решение системы (2.7) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2). \quad (2.9)$$

Предполагается, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^R \rho^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^R \lambda^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \mu(z) = \sum_{k=0}^R \mu^{(k)}(z + h/2)^k.$$

Для определения коэффициентов разложений (2.9) краевая задача (2.7), (2.8) сводится к задачам с начальными условиями в точке $z = -h/2$. В качестве фундаментальных решений выбраны четыре решения задачи Коши $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$ ($l = 1, 2, 3, 4$) для системы (2.7) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми. Взяты следующие начальные условия:

$$\mathbf{U}^l|_{z=a} = (\delta_{1l}, \delta_{2l})^T, \quad \mathbf{U}^{l'}|_{z=a} = (\delta_{3l}, \delta_{4l})^T \quad (l = 1, 2, 3, 4),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; l – порядковый номер задачи Коши.

Однородность системы (2.7) позволяет представить решение краевой задачи (2.7), (2.8) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^4 C_l \mathbf{U}^l, \quad U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)} (z + h/2)^s \quad (n=1,2).$$

Получены рекуррентные формулы для нахождения всех коэффициентов разложений $U_n^{l(s)}$ за исключением первых двух $U_n^{l(0)}$ и $U_n^{l(1)}$ ($n=1,2$), которые определяются из начальных условий для каждой из четырех задач Коши. Незвестные постоянные C_l ($l=1,2,3,4$) определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A} \mathbf{U}^l + \mathbf{E} \mathbf{U}^l)|_{z=-h} = \mathbf{D}, \quad \sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A} \mathbf{U}^l + \mathbf{F} \mathbf{U}^l)|_{z=0} = 0.$$

В результате получаем приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.7), (2.8)

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 C_l \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)} (z + h/2)^s \quad (n=1,2).$$

Краевая задача для второго случая решается аналогичным образом.

В разделе 2.4 приводятся результаты численных исследований и анализ полученных результатов. Были проведены расчеты модулей коэффициентов отражения $|A_1|$, $|\tilde{A}_1|$ и прозрачности $|A_2|$, $|\tilde{A}_2|$ для упругой пластины с непрерывно-неоднородным покрытием соответственно для случаев, когда покрытие расположено на поверхности пластины со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны. Исследовались угловые и частотные зависимости.

Рассматривалась алюминиевая пластина с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде. Расчеты проводились как для однородного покрытия, так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ менялись по толщине слоя по разным линейным и квадратичным законам (рис. 2.2 и рис. 2.3).

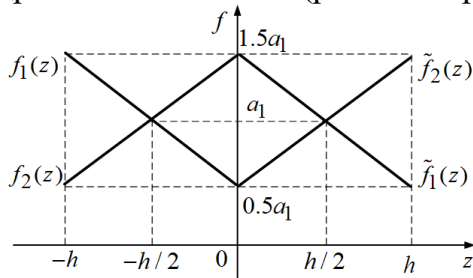


Рис. 2.2. Графики для линейных законов неоднородности $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $\tilde{f}_1(z)$, $\tilde{f}_2(z)$

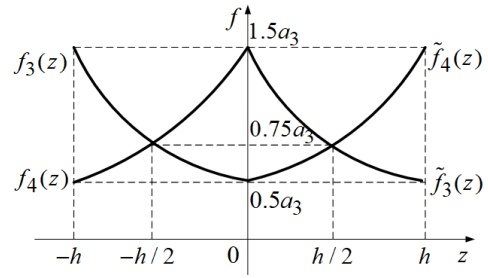


Рис. 2.3. Графики для квадратичных законов неоднородности $f_3(z)$, $f_4(z)$ и $\tilde{f}_3(z)$, $\tilde{f}_4(z)$

Анализ рассчитанных зависимостей показал, что неоднородность материала покрытия существенно влияет на акустические характеристики пластины. Исследовано влияние расположения покрытия на пластине и разных типов неоднородности материала покрытия на коэффициенты отражения и прохождения

звука. Обнаружены характерные черты и эффекты звукоотражения и звукопрохождения.

На рис. 2.4 и 2.5 приведены некоторые результаты расчетов для случая, когда покрытие находится со стороны падения плоской волны.

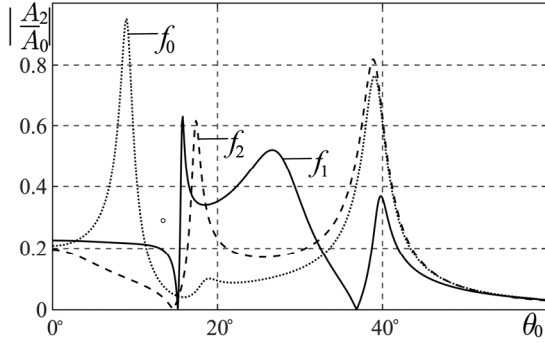


Рис. 2.4. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения плоской волны для однородного покрытия $f_0(z)$ и покрытий с линейными законами неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $k_1 H = 5$

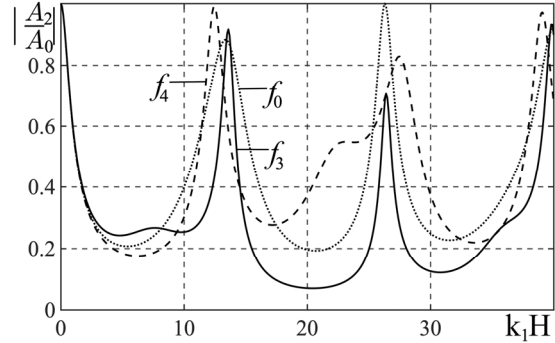


Рис. 2.5. Частотные зависимости коэффициента прозрачности для однородного покрытия $f_0(z)$ и покрытий с квадратичными законами неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $\theta_0 = 0$

В главе 3 рассматривается задача об отражении и прохождении цилиндрической звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

В разделе 3.1 приведена постановка двумерной задачи, которая аналогична, приведенной в разделе 2.1. Полагается, что покрытие расположено со стороны падения цилиндрической волны, излучаемой бесконечно длинным линейным источником, параллельным оси y . Положение источника определяется координатами $x = x_0 = 0$; $-\infty < y < \infty$; $z = -z_0$. Потенциал скорости симметричной цилиндрической волны имеет вид

$$\psi_0 = A H_0(k_1 R) \exp(-i\omega t), \quad R = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}, \quad (3.1)$$

где $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка.

В разделах 3.2 и 3.3 приводится математическая модель задачи и находится ее аналитическое решение на основе решения задачи о прохождении плоских волн через пластину с покрытием, полученного в разделах 2.2 и 2.3. Используя интегральное представление функции $H_0(x)$, запишем цилиндрическую волну (3.1) в виде

$$\psi_0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

$$\text{где } \hat{\psi}_0(\xi) = A \frac{1}{\pi \eta_1} e^{i\xi(x-x_0)} e^{i\eta_1|z+z_0|}, \quad \eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}. \quad (3.3)$$

Произведение экспонент в подынтегральном выражении (3.2) представляет собой плоскую волну, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной η_1 компонентами волнового вектора $\mathbf{k}_1$.

Сравнивая формулы (3.3) и (2.1) замечаем, что подынтегральное выражение в (3.2) аналогично по форме выражению плоской волны (2.1). При этом ξ соответствует k_{1x} , а $I(\xi) - A_0 e^{ik_{1z}h}$. Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\hat{\psi}_0(\xi)$, потенциалы отраженной $\hat{\psi}_1$ и прошедшей $\hat{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\hat{\Psi}$, $\hat{\Phi}$ и компоненты вектора смещения $\hat{u}_x$, $\hat{u}_z$ в покрытии определяется формулами, аналогичными приведенным в главе 2, в которых следует сделать указанные выше замены.

При рассеянии цилиндрической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы ψ_j ($j=1,2$), Ψ , Φ и компоненты вектора смещения u_x , u_z в неоднородном покрытии определяется путем интегрирования

$$\psi_j(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_j(\xi) d\xi \quad (j=1,2), \quad \Psi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(\xi) d\xi, \quad \Phi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(\xi) d\xi,$$

$$u_x(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_x(\xi) d\xi, \quad u_z(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_z(\xi) d\xi.$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи, не прибегая к непосредственному решению соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями, что сильно затруднено, так как геометрия фронта падающей волны не совпадает с геометрией тела.

В разделе 3.4 представлены результаты численных расчетов зависимостей амплитуды отраженной и прошедшей волн от волнового размера пластины $k_1 H$ для пластин с покрытием, имеющих те же характеристики, что и рассматриваемые в главе 2. Проанализированы частотные характеристики для разных законов неоднородности.

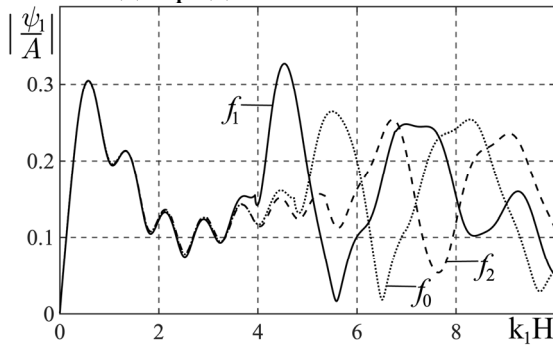


Рис. 3.2. Зависимости $|\psi_1 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для однородного покрытия $f_0(z)$ и покрытий с линейными законами неоднородности $f_1(z)$ и $f_2(z)$ при $z_0 = 10H$ и $z = -2H$

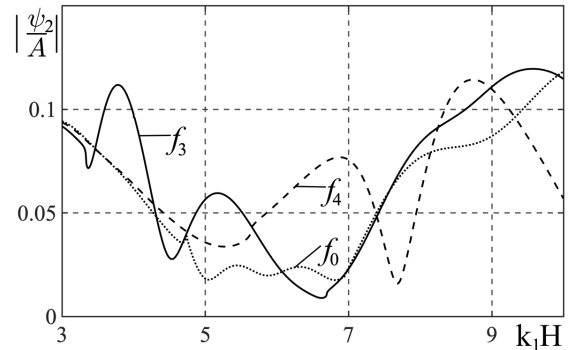


Рис. 3.3. Зависимости $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для однородного покрытия $f_0(z)$ и покрытий с квадратичными законами неоднородности $f_3(z)$ и $f_4(z)$ при $z_0 = 10H$ и $z = 2H$

В главе 4 рассматривается задача об отражении и прохождении сферической звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

В разделе 4.1 приведена постановка задачи, которая аналогична, приведенной в разделе 2.1. Полагается, что покрытие расположено со стороны падения сферической волны, излучаемой точечным источником. Положение источника

определяется координатами $x=0$; $y=0$; $z=-z_0$. Потенциал скорости падающей сферической волны имеет вид

$$\psi_0 = A \frac{\exp[i(k_1 R - \omega t)]}{R}, \quad R = [x^2 + y^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}.$$

В разделах 4.2 и 4.3 приводится математическая модель задачи и находится ее аналитическое решение.

Потенциал скорости сферической волны представляется в виде разложения по плоским волнам

$$\psi_0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_0(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma, \quad (4.1)$$

$$\text{где } \hat{\psi}_0(\xi, \varsigma) = I(\xi, \varsigma) e^{i[\xi x + \varsigma y + \chi_1 z]}, \quad I(\xi, \varsigma) = A \frac{i}{2\pi\chi_1} e^{i\chi_1 z_0}, \quad \chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}.$$

Подынтегральное выражение в (4.1) аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на пластину с покрытием. Потенциал скорости такой плоской волны определяется выражением

$$\psi_{0pl} = A_0 \exp\{i[k_{1x}x_1 + k_{1y}y_1 + k_{1z}(z_1 + h)]\},$$

где $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_{1y} = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$; θ_0 и φ_0 – полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Поэтому решение задачи о прохождении сферической волны находится с помощью решения трехмерной задачи о прохождении плоских волн через пластину с покрытием, полученного в разделе 4.3.1.

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\hat{\psi}_0(\xi, \varsigma)$, потенциалы отраженной $\hat{\psi}_1$ и прошедшей $\hat{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\hat{\Psi}$, $\hat{\Phi}$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ в покрытии определяются формулами, аналогичными для случая падения плоской волны с потенциалом ψ_{0pl} , в которых следует заменить k_{1x} на ξ , k_{1y} на ς , A_0 на $I(\xi, \varsigma)e^{-i\chi_1 h}$.

Искомые величины ψ_j ($j=1, 2$), Ψ , Φ , $\mathbf{u}$ подлежат определению путем интегрирования $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, $\hat{\Psi}$, $\hat{\Phi}$, $\hat{\mathbf{u}}$ по ξ и ς . Например,

$$\psi_j(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi, \varsigma) d\xi d\varsigma \quad (j=1, 2).$$

В разделе 4.4 приведены результаты численных расчетов зависимостей $|\psi_1 / A|$ и $|\psi_2 / A|$ от волнового размера пластины $k_1 H$ для пластин с покрытиями, имеющих те же характеристики, что и рассматриваемые в главе 2. Проведен анализ частотных зависимостей.

В разделе 4.5 для верификации полученных результатов использовано решение двумерной задачи об отражении и преломлении плоской волны, полученное в главе 2. Для этого осуществлен переход от двумерного случая к трех-

мерному и преобразование решения двумерной задачи. Расчеты показали практически полное совпадение соответствующих зависимостей, вычисленных двумя способами.

В **главе 5** рассматриваются задачи об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую однородную пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием, граничащую с вязкими жидкостями, в случаях, когда покрытие нанесено на разные стороны пластины.

В **разделе 5.1** приведена постановка задач. Рассматриваются два случая расположения покрытия на пластине: покрытие расположено со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны.

В **разделе 5.2** получены аналитические решения задач. Для решения задачи в первом случае потенциалы скоростей продольных и вязких волн отраженных от пластины и прошедшей через нее волн ψ_1 , ϕ_1 и ψ_2 , ϕ_2 , являющиеся решениями уравнений (1.2) и (1.3), ищутся в виде

$$\psi_1 = A_1 \exp \{i[k_{1x}^{(1)}x - k_{1z}^{(1)}(z + h)]\}, \quad \phi_1 = B_1 \exp \{i[k_{2x}^{(1)}x - k_{2z}^{(1)}(z + h)]\},$$

$$\psi_2 = A_2 \exp \{i[k_{1x}^{(2)}x + k_{1z}^{(2)}(z - H)]\}, \quad \phi_2 = B_2 \exp \{i[k_{2x}^{(2)}x + k_{2z}^{(2)}(z - H)]\},$$

где $k_{1x}^{(j)}$, $k_{1z}^{(j)}$ и $k_{2x}^{(j)}$, $k_{2z}^{(j)}$ – проекции волновых векторов продольной и вязкой волн на оси x и z в j -ой жидкости.

Потенциалы смещения Ψ и Φ ищутся в виде

$$\Psi = C_1 \exp[i(k_{lx}x + k_{lz}z)] + C_2 \exp[i(k_{lx}x - k_{lz}z)],$$

$$\Phi = D_1 \exp[i(k_{tx}x + k_{tz}z)] + D_2 \exp[i(k_{tx}x - k_{tz}z)],$$

Согласно закону Снеллиуса $k_{1x}^{(2)} = k_{2x}^{(1)} = k_{2x}^{(2)} = k_{lx} = k_{tx} = k_{1x}^{(1)}$.

Компоненты вектора $\mathbf{u}$ ищутся в виде

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x), \quad u_z = U_2(z) \exp(ik_{1x}^{(1)}x),$$

где функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ являются решениями краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (2.7).

Из граничных условий на поверхностях пластины с покрытием находим выражения для коэффициентов A_j , B_j , C_j , D_j ($j=1,2$) и четыре краевых условия вида (2.8) для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений. Во втором случае задача решается аналогично.

Получены выражения для коэффициента поглощения α , характеризующего потерю энергии падающей волны вследствие вязкости жидкостей. Коэффициент поглощения определяется следующим образом:

$$\alpha = (I_0 - I_1 - I_2) / I_0,$$

где I_0 , I_1 и I_2 – интенсивности падающей, продольных отраженной и прошедшей плоских волн.

В **разделе 5.3** приведены результаты численных исследований. Рассчитывались угловые и частотные зависимости коэффициентов отражения и прозрачно-

сти, а также зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для пластин с однородными и неоднородными покрытиями, расположенными на разных сторонах пластины.

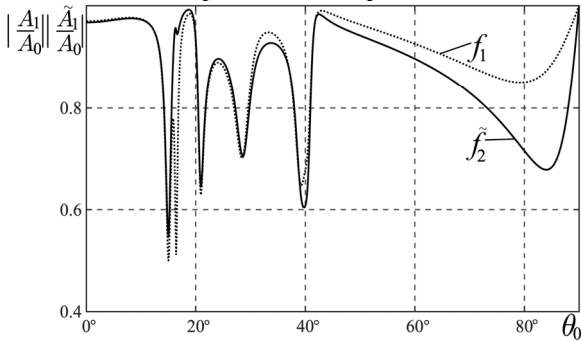


Рис. 5.2. Зависимости коэффициентов отражения от угла падения плоской волны для неоднородных покрытий $f_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$; $k_1 H = 15$, содержащая среда – глицерин

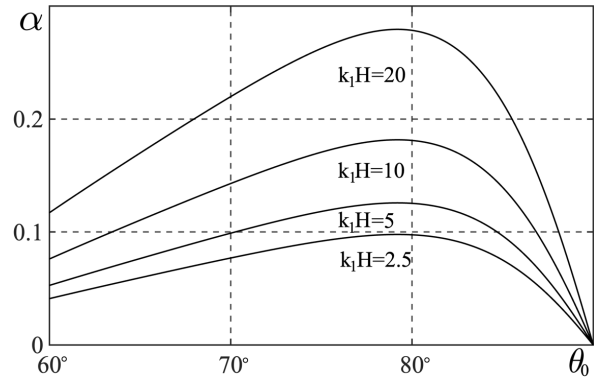


Рис. 5.3. Зависимости коэффициента поглощения от угла падения плоской волны для неоднородности вида $f_3(z)$, содержащая среда – глицерин

На рис. 5.2, 5.3 изображены некоторые из рассчитанных зависимостей.

Проанализировано влияние расположения покрытия, вида неоднородности материала покрытия, свойств жидкостей, граничащих с пластиной, угла падения плоской волны и ее частоты на поглощение акустической энергии вследствие вязкости окружающих жидкостей.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе получила развитие теория дифракции звуковых волн. Получен ряд новых результатов, краткое содержание которых излагается ниже.

1. Построены математические модели отражения и прохождения гармонических звуковых волн через упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными и вязкими жидкостями.

2. Получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении плоских звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными жидкостями. Проведены расчеты угловых и частотных зависимостей отраженных и преломленных акустических полей.

Выявлено существенное влияние неоднородности материала покрытия на акустические характеристики пластины. Описаны характерные черты влияния разных типов неоднородности материала покрытия на величину коэффициентов отражения и прохождения звука.

Исследовано влияние расположения покрытия пластины (когда покрытие нанесено на пластину со стороны падения плоской волны и с противоположной стороны) на звукоотражение и звукопрохождение. Обнаружено, что в случае, когда жидкости по обе стороны пластины одинаковы, перенос с переворотом покрытия с одной стороны однородной пластины на другую не изменяет картину отражения и прохождения звука при любых линейных и нелинейных законах неоднородности материала покрытия. Если по обе стороны пластины жидкости разные, то такой эффект не наблюдается. При переносе однородного покрытия с одной стороны пластины на другую угловые и частотные характери-

стики остаются неизменными. Перенос неоднородного покрытия без переворота приводит к изменению акустических характеристик пластины.

3. Предложен подход к решению задач об отражении упругой пластиной с неоднородным покрытием и прохождении через нее звуковых волн с криволинейным фронтом распространения. Подход заключается в получении аналитических решений задач с использованием решения задачи об отражении и прохождении плоской волны.

4. Получены аналитические решения задач о прохождении цилиндрических и сферических гармонических звуковых волн через однородную упругую пластину с неоднородным упругим покрытием, граничащую с идеальными жидкостями, и проведены численные исследования.

Выяснено влияние расходимости падающих цилиндрических и сферических волн на отражение и прохождение звука. Проведено сравнение частотных зависимостей отраженного и прошедшего акустических полей для однородного и разных видов неоднородных покрытий. Выявлено, что они существенно различаются друг от друга на всем рассматриваемом диапазоне волнового размера пластины. Причем это отличие становится все более выраженным при увеличении волнового размера пластины. При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается сильное изменение частотных зависимостей для одного и того же вида неоднородности материала покрытия, что проявляется в изменении уровней характеристик и сдвиге резонансных частот. Обнаружено, что по мере удаления линейного и точечного источников от пластины усиливается колебательный характер частотных зависимостей для отраженного и для прошедшего акустических полей как в случае однородного покрытия, так и при разных законах неоднородности материала покрытия.

5. Получено аналитическое решение задачи о прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями.

Анализ результатов численных расчетов показал, что поглощение акустической энергии вследствие вязкости окружающих жидкостей существенно зависит от закона неоднородности материала покрытия, расположения покрытия, свойств жидкостей, граничащих с пластиной, угла падения плоской волны и ее частоты. Обнаружено, что при возрастании угла падения наблюдается увеличение диссипации энергии. Величина потерь достигает максимального значения при некотором критическом угле, а затем снижается до нуля при приближении к углу 90° . Выявлены характерные черты изменения коэффициента поглощения для покрытий с разными типами неоднородности материала. Показано, что повышение частоты звуковых волн приводит к увеличению поглощения не только в области критических углов, но и при меньших углах падения. При этом происходит смещение критического угла в область меньших значений.

Основные публикации по теме диссертации
Статьи в изданиях, индексируемых в системе Scopus

1. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.

2. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Определение поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.

3. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 312 – 327.

4. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 5. С. 305 – 319.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

5. Толоконников Л.А., Нгуен Т.Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

6. Нгуен Тхи Шанг. Программа определения поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021664792, 14.09.2021. 1 с.

7. Нгуен Тхи Шанг. Программа расчёта акустических полей при отражении и прохождении звука через упругую пластину с неоднородным покрытием. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021665340, 23.09.2021. 1 с.

Статьи в других научных изданиях

8. Нгуен Тхи Шанг. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.

9. Нгуен Тхи Шанг, Толоконников Л.А. Численный анализ прохождения цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным прилегающим слоем // Сб. трудов Междунар. научно-техн. конф. «Актуальные пробл. прикл. матем., информ. и мех.». Воронеж: Научно-исследов. публикации. 2022. С. 1285 – 1290.

10. Нгуен Тхи Шанг. Об определении волнового поля в неоднородном покрытии пластины при произвольном падении на нее плоской звуковой волны // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференц. уравнения и прикладные задачи. 2022. Вып. 1. С. 72 – 83.

11. Нгуен Тхи Шанг. О рассеянии звуковых волн, излучаемых точечным источником, упругой пластиной с неоднородным покрытием // Сб. трудов междунар. научно-техн. конф. «Актуальные пробл. прикл. матем., информ. и мех.». Воронеж: Научно-исследов. публикации. 2023. С. 1131 – 1137.